Trasformazioni di Immagini

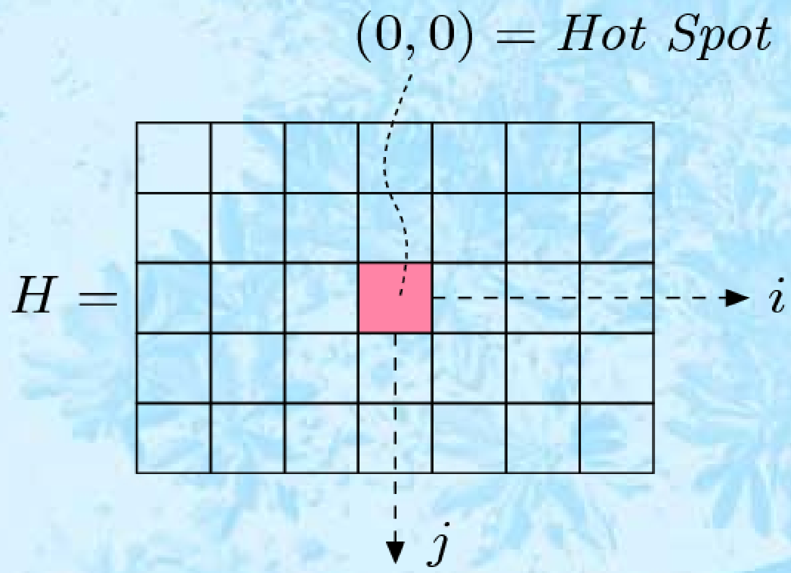
Filtri

Spatial Filtering

- A differenza della trasformazioni tipo ‘*point operations*’ il singolo pixel è ricalcolato in funzione del suo valore e del valore dei pixel circostanti
- L’operazione di ricalcolo avviene secondo la stessa procedura per tutta l’immagine. Di conseguenza la definizione di un filtro può essere descritta a partire dalle operazioni necessarie che conducono al ricalcolo di un singolo pixel

Hot Spot di un filtro lineare

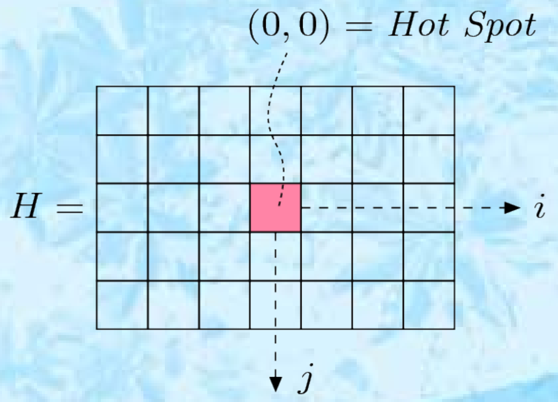
- Ogni matrice ha un "*hot spot*", generalmente il centro della matrice H di un filtro (anche se non necessariamente)



Spatial Filtering

- Definizione di filtro lineare *:*

$$I'(u,v) = \sum_{i=-R}^{R} \sum_{j=-R}^{R} I(u+i, v+j) \cdot H(i,j)$$



Filtri Lineari

Il significato dell'espressione è quello di somma di prodotti tra i valori di intensità dell’immagine e i valori di una matrice H fissata e caratteristica del filtro

La somma avviene sugli indici i e j che prendono i 2R+1 valori interi nell’intervallo [-R,R]

La matrice H ha in genere forma quadrata (numero colonne uguale al numero delle righe)

L’elemento centrale ha coordinate (0,0) e viene chiamato *hot-spot*

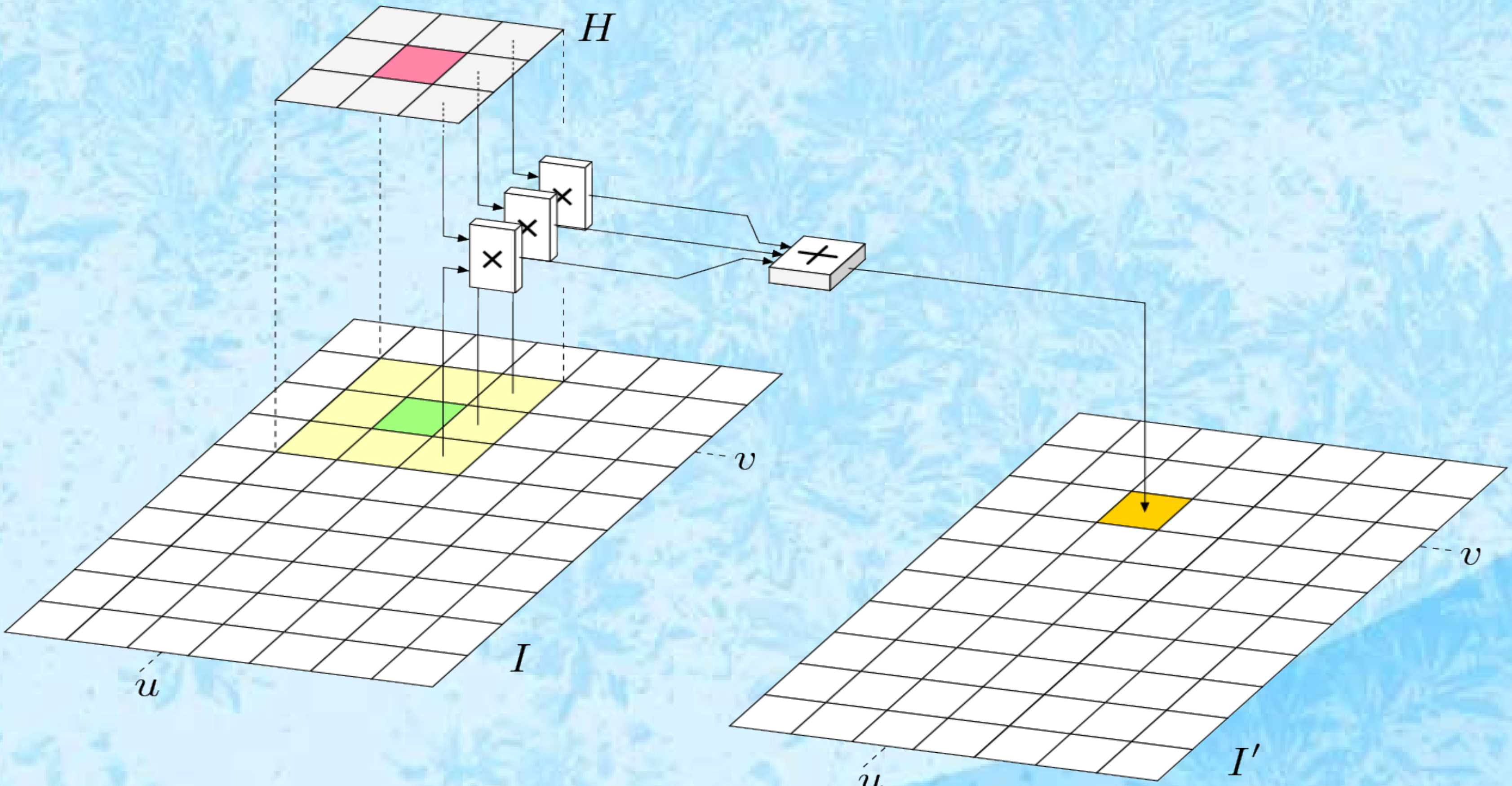
I valori di H sono calcolati sulla base di qualche funzione di 2 variabili.

Questa funzione si chiama *Kernel di un filtro* e i suoi valori sono un ‘campionamento’ del kernel

H(i,j) Matrice di piccola dimensione rispetto all’immagine

Filtri lineari

- Modello correlativo del calcolo di un filtro lineare



Filtri lineari

La figura nella slide precedente mostra visivamente come ogni elemento viene ricalcolato

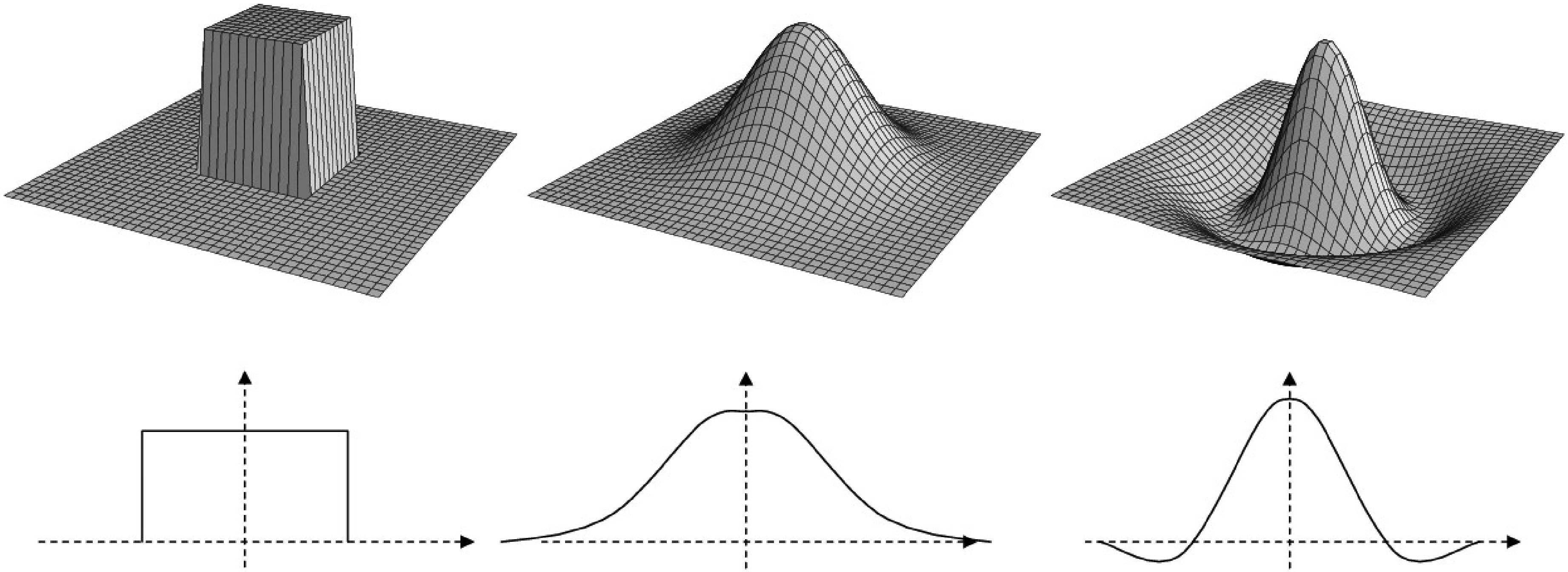
- La matrice H viene posizionata con l’hot-spot sul pixel da ricalcolare
- Ogni elemento della matrice H viene moltiplicato per il valore del pixel corrispondente
- I risultati delle moltiplicazioni vengono sommati
- Il risultato della somma è il valore ricalcolato
- L’operazione deve venire ripetuta per ogni pixel dell’immagine
- Per il ricalcolo dei valori sui bordi, per i quali possono non esserci valori corrispondenti ad alcuni elementi della matrice H, la formula viene modificata. Per immagini sufficientemente grandi questo non ha effetti visibili

Filtro di smoothing

Filtro di Smoothing

- Un pixel della nuova immagine è ricalcolato come media dei pixel circostanti
- Il modo in cui viene calcolata la media dipende dal kernel del filtro
- Media aritmetica: il kernel è una costante che attribuisce a tutti i pixel che concorrono al calcolo lo stesso peso. Equivale alla media ordinaria di un insieme di valori (in questo caso sono i pixel “coperti” dalla matrice H)
- Media ponderata: ai pixel viene assegnato un peso diverso, solitamente attribuendo un peso più basso ai valori più lontani dall’*hot-spot*. La più comune media ponderata è quella basata sulla funzione di Gauss

Esempi di filtri lineari



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

(a)

0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

(b)

0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

(c)

I coefficienti effettivi devono essere normalizzati

Filtro di Smoothing

Principale uso:

- Limitazione del rumore luminoso casuale e scorrelato dall'oggetto
- Costruzione di immagini della distribuzione della luminosità media
- Rimozione di variazioni del background
- Preparazione per operazioni di esaltazione del contrasto locale (rafforzamento dei bordi di regioni)

Riduzione del Rumore

- Modello di corruzione da rumore

$$\tilde{x}(u,v) = x(u,v) + \eta(u,v)$$

- L'immagine rappresentata è la somma di una ipotizzata immagine "vera" indicata da $x(u,v)$
- All'immagine incontaminata si somma un rumore <u>scorrelato</u> dall'immagine stessa $\eta(u,v)$
- Il valore medio atteso del rumore è zero

$$< \eta(u,v) >_{u,v} = 0$$

- Le coordinate *u,v* all'esterno dell'operatore di media indicano la *media spaziale*

Riduzione del Rumore

- L'azione di un filtro di media su questo modello tende a sostituire un pixel con la media dei vicini riducendo il rumore

$$x'(u,v) = <\tilde{x}(u,v)> = \frac{1}{2R+1}\sum_{i,j=-R}^{R} x(u+i,v+j) + \frac{1}{2R+1}\sum_{i,j=-R}^{R} \eta(u+i,v+j)$$

- R è legato alla dimensione della matrice di media
  - Per una matrice H di dimensione 3x3 R = 1
- Se valori di intensità dell'immagine sono indipendenti dal rumore

$$\sum_{i,j=-R}^{R} \eta(u+i,v+j) \rightarrow 0$$

$$x'(u,v) = <\tilde{x}(u,v)> = \overline{x}(u,v)$$

Filtro di Media

Esempio per R=1 e H(i,j)=1/9 (kernel = costante)

$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I'(u,v) \leftarrow \frac{1}{9} \cdot \sum_{j=-1}^{1} \sum_{i=-1}^{1} I(u+i, v+j)$$

$$\begin{aligned} I'(u,v) \leftarrow \tfrac{1}{9} \cdot [\, & I(u-1,v-1) && + I(u,v-1) && + I(u+1,v-1) && + \\ & I(u-1,v) && + I(u,v) && + I(u+1,v) && + \\ & I(u-1,v+1) && + I(u,v+1) && + I(u+1,v+1) \,] \end{aligned}$$

Azione di un box-filter

I =

10	11	10	0	0	1
9	10	11	1	0	1
10	9	10	0	2	1
11	10	9	10	9	11
9	10	11	9	99	11
10	9	9	11	10	10

X	X	X	X	X	X
X	10				X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

H = 1/9

1	1	1
1	1	1
1	1	1

(10x1 + 11x1 + 10x1 + 9x1 + 10x1 + 11x1 + 10x1 + 9x1 + 10x1) / 9 = 10

Azione di un box-filter

I

10	11	10	0	0	1
9	10	11	1	0	1
10	9	10	0	2	1
11	10	9	10	9	11
9	10	11	9	99	11
10	9	9	11	10	10

X	X	X	X	X	X
X	10	7	4	1	X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

H = 1/9

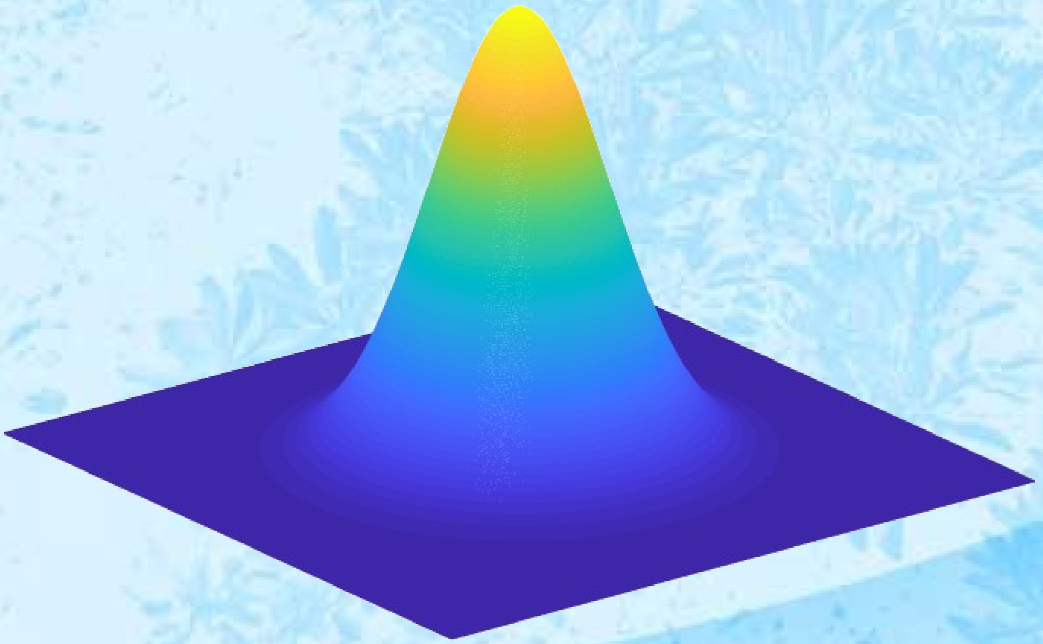
1	1	1
1	1	1
1	1	1

(10x1 + 0x1 + 0x1 + 11x1 + 1x1 + 0x1 + 10x1 + 0x1 + 2x1) / 9 = 34 = 3.7778 ~ 4 (assumendo l’immagine rappresentata come uint8)

Filtri di media gaussiana

- Gaussian filter: filtro di media ponderata con i coefficienti calcolati dalla funzione di Gauss in 2-D

$$G_\sigma(u,v) = e^{-\frac{(u^2+v^2)}{2\sigma^2}}$$



Matrici H generate da Matlab/Octave

Matlab e Octave hanno la funzione *fspecial* che genera le matrici H di rappresentazione di un filtro.

La funzione ammette uno o più argomenti e ritorna la matrice generata

Nell'esempio riportato la funzione ritorna la matrice H di un filtro di media di dimensione uguale a 5

```
octave:1> H=fspecial("average",5)
ans =

   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000
   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000
   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000
   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000
   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000   0.040000

octave:2> sum(H(:))
ans =  1
```

Matrici H generate da Matlab/Octave

Esempio di matrice gaussiana di ordine 5

- Il secondo argomento determina la dispersione della funzione di Gauss. In altre parole quanto la campana di Gauss è larga
- Si noti che i coefficienti sono nell'insieme normalizzati (somma uguale a 1)

```
>> H=fspecial("gaussian",5,0.6)
H =
   0.0000   0.0004   0.0017   0.0004   0.0000
   0.0004   0.0274   0.1099   0.0274   0.0004
   0.0017   0.1099   0.4407   0.1099   0.0017
   0.0004   0.0274   0.1099   0.0274   0.0004
   0.0000   0.0004   0.0017   0.0004   0.0000
>> sum(H(:))
ans =
    1
```

Matrici H generate da Matlab/Octave

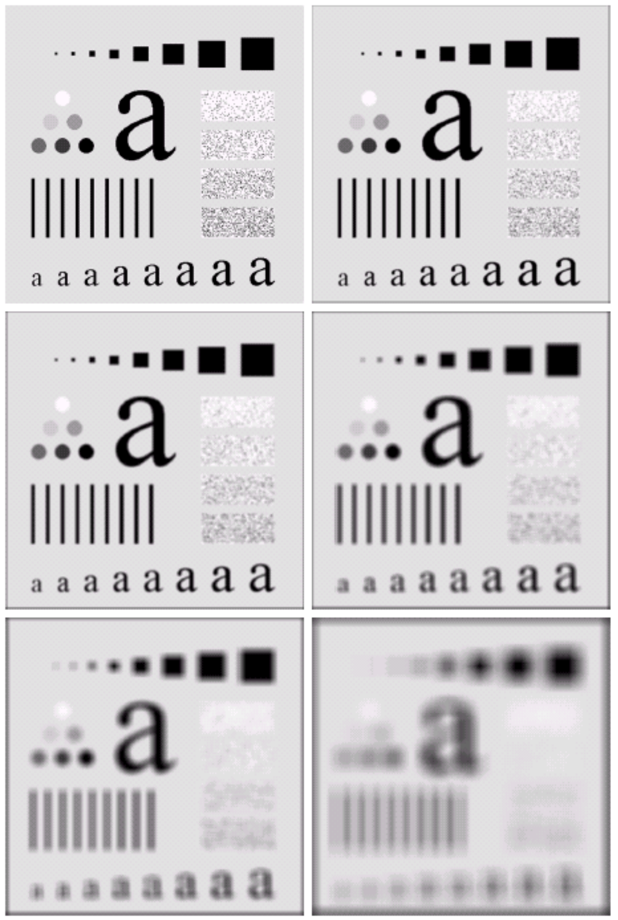
La forma del filtro è un elemento importante

Il *disk filter* assomiglia come forma ad un filtro di media gaussiana, ma con una transizione dal valore centrale costante verso 0 molto rapida. Questa caratteristica lo rende numericamente simile al box filter

```
>> H=fspecial("disk",5)

H =

         0         0         0    0.0012    0.0050    0.0063    0.0050    0.0012         0         0         0
         0    0.0000    0.0062    0.0124    0.0127    0.0127    0.0127    0.0124    0.0062    0.0000         0
         0    0.0062    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0062         0
    0.0012    0.0124    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0124    0.0012
    0.0050    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0050
    0.0063    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0063
    0.0050    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0050
    0.0012    0.0124    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0124    0.0012
         0    0.0062    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0127    0.0062         0
         0    0.0000    0.0062    0.0124    0.0127    0.0127    0.0127    0.0124    0.0062    0.0000         0
         0         0         0    0.0012    0.0050    0.0063    0.0050    0.0012         0         0         0

>> sum(H(:))

ans =

   1.0000
```

Filtro di Media

- Effetto di blurring su un immagine
  - Il filtro è di media aritmetica
  - Le dimensioni delle matrici sono 3,5,9,15,25,35,45
- L'immagine originale è nell'angolo in alto a sx



Applicazione Filtro Gaussiano

- Originale

- 3x3, σ=1

- 5x5, σ=2

Filtro Gaussiano

Immagine Originale

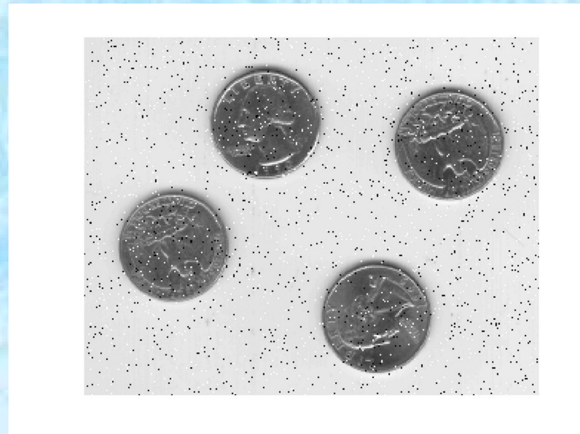


Immagine + rumore “Sale&Pepe”

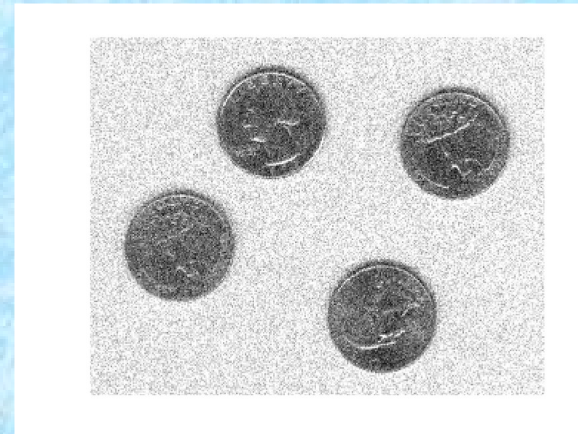
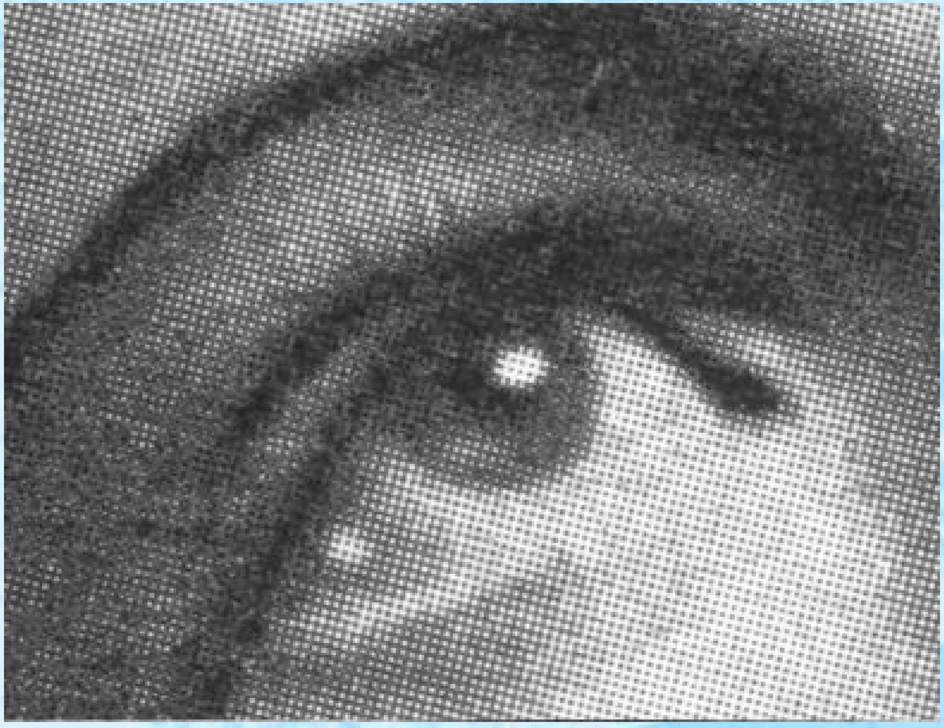


Immagine + rumore Gaussiano

Stesse Immagini dopo l’applicazione di un filtro gaussiano 3x3

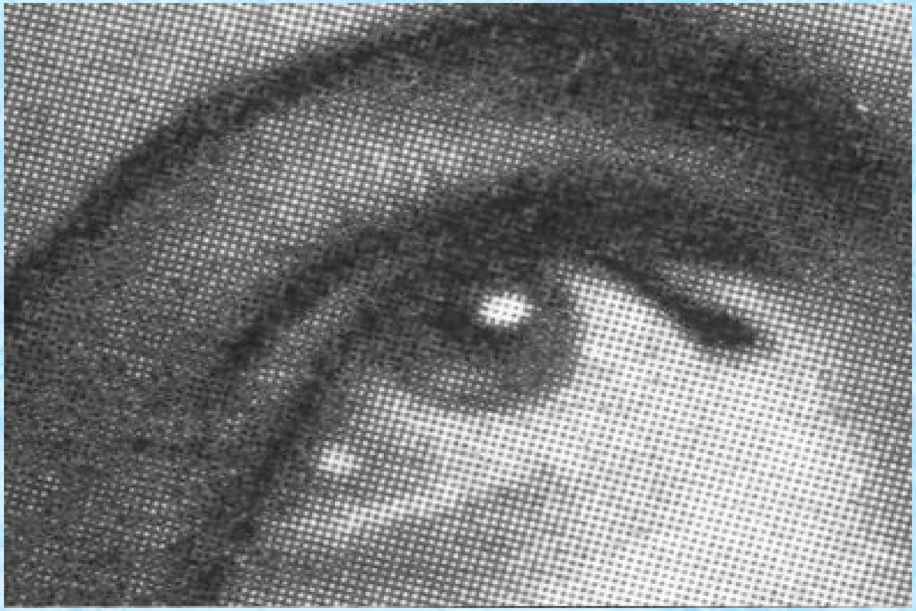
Filtro Gaussiano

- Eliminazione delle alterazioni di luminosità genarate da digitalizzazione di una stampa
- In questo caso non si tratta di rumore casuale, ma di alterazioni introdotte dalla tecnica di stampa per rendere le scale di grigi



Filtro Gaussiano

- Originale



- Filtrato

Questo tipo di rumore con natura pediodica viene filtrato con miglior efficacia intervenendo sulla struttura della sua Fourier Transform

Filtri di Derivazione

- Nella lezione L2021-4 vedremo anche l’applicazione di filtri che calcolano variazioni dell’intensità all’interno dell’immagine
- Questi filtri sono rappresentati da matrici H che, per poter calcolare differenze di intensità nell’intorno di ogni pixel, contengono elementi negativi
- L’output dei filtri di differenza/derivazione possono essere rappresentati come immagini solo riassegnando i valori dei pixel dato che in generale (e in pratica sempre) contengono elementi a intensità negativa

Filtri non lineari

Filtri Non-Lineari

- I filtri lineari seguono metodi o algoritmi di calcolo che non possono essere ridotti nella rappresentazione con una matrice H
- I filtri lineari più comuni hanno migliori risultati nella correzioni di alterazioni ‘*puntiformi’* cioè che intervengono su singoli pixel
- I 3 filtri non lineari che vedremo nelle prossime slide sono
    - Filtro di massimo
    - Filtro di minimo (in realtà come quello precedente ma a logica invertita)
    - Filtro di mediana: probabilmente quello che ha risultati migliori per molti scopi pratici

Filtro di massimo

Definizione formale

$$I'(u,v) \leftarrow \max\{I(u+i,v+j) \mid (i,j) \in R\}$$

Significato ed azione:

Partendo dal pixel con coordinate *(u,v)* si considera una regione R attorno ad esso

Questa regione è rappresentata dai possibili valori degli indici *(i,j)* che quindi definiscono un insieme di pixel circostanti

Il nuovo valore del pixel è il valore più grande all'interno di questo insieme

L'esempio più naturale è quello della regione R definita dai pixel direttamente adiacenti a un dato pixel. I valori degli indici *(i,j)* che definiscono tale regione sono le nove coppie di valori

(i,j)=(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,-1),(1,0),(1,1)

La coppia *(0,0)* identifica il pixel che viene ricalcolato, le altre coppie tutti quelli che sono adiacenti (coppie *(u-1,v-1),(u-1,v),(u-1,v+1)*...)

Filtro di minimo

Definizione formale

$$I'(u,v) \leftarrow \min\{I(u+i,v+j) \mid (i,j) \in R\}$$

L'azione è definita come nel caso del filtro di massimo, ma invece del valore più grande si prende il valore più piccolo all'interno della regione R

Azione dei filtri di massimo e minimo

- La slide successiva mostra l’azione dei filtri di massimo e minimo
- A sinistra in alto l’immagine originale viene alterata con un rumore costituito da punti bianchi e neri dispersi casualmente
- A sinistra in basso un dettaglio ingrandito di questa foto
- Al centro l’azione del filtro di minimo
- A destra l’azione del filtro di massimo
- La foto mostrata (presa da W.Burger e M. Burge “Digital Signal Processing”) è una delle immagini che viene tradizionalmente usata come benchmark per confrontare l’azione di trasformazioni e filtri. La foto è del 1972 e la modella si chiama Lena Forsén. Oggi sessantenne è stata invitata in questi anni a vari congressi internazionali di Digital Image Processing, essendo diventata, suo malgrado, un’icona.

Azione dei filtri di max e min

(a) (b) (c)

Filtro di mediana

$$I'(u,v) \leftarrow \text{median}\{I(u+i,v+j) \mid (i,j) \in R\}$$

Anche per il filtro di mediana definiamo la regione R dei pixel circostanti alla posizione *(u,v).* Anche in questo caso sono i pixel che concorrono al ricalcolo e per semplicità nell'esempio successivo ancora una volta R è una regione 3x3 centrata intorno al pixel *(u,v)*

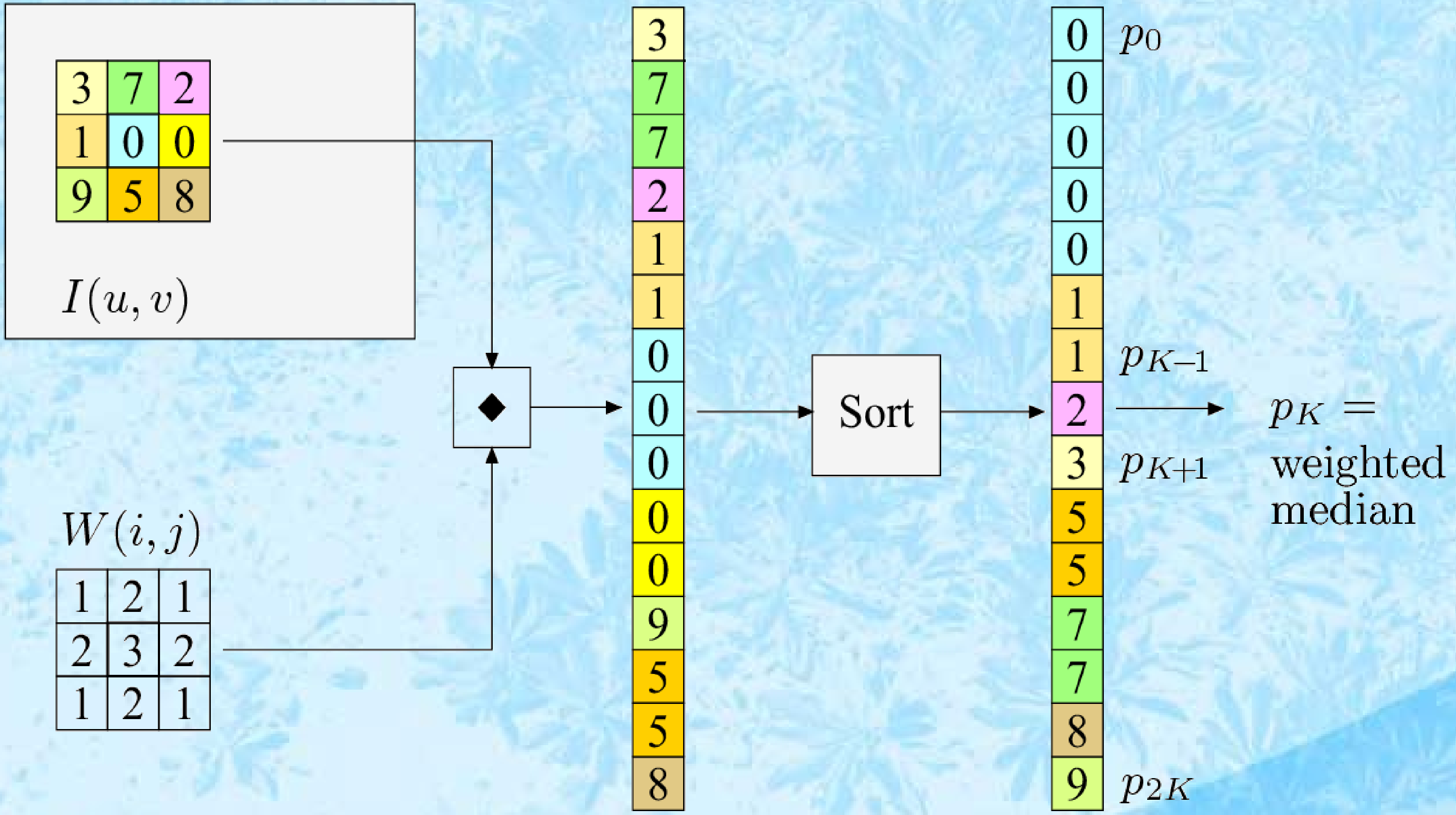
Il processo è basato sulla determinazione della mediana dei valori di un insieme costruito a partire dall'insieme R.

La mediana è l'elemento centrale dell'insieme di valori ordinati, cioè l'elemento che separa lo separa in due sottinsiemi di uguale numerosità. Si sceglie una matrice W di molteplicità dei valori per dare pesi diversi ai pixel nella determinazione della distribuzione e quindi per ogni pixel di coordinate *(u,v)*

1) Vengono presi i valori circostanti al pixel da ricalcolare
2) Ognuno di questi valori viene ripetuto tante volte quanto la molteplicità corrispondente in W ed entrano a far parte dell'insieme V
3) L'insieme V viene ordinato
4) La mediana è l'elemento centrale nell'array dei valori ordinati

Nella prossima slide provate a ricostruire mentalmente questo processo trovando corrispondenza nel diagramma

Filtro di Mediana



Confronto tra smoothing filter e filtro di Mediana

Ancora una volta la foto con Lena Forsén viene presa come esempio

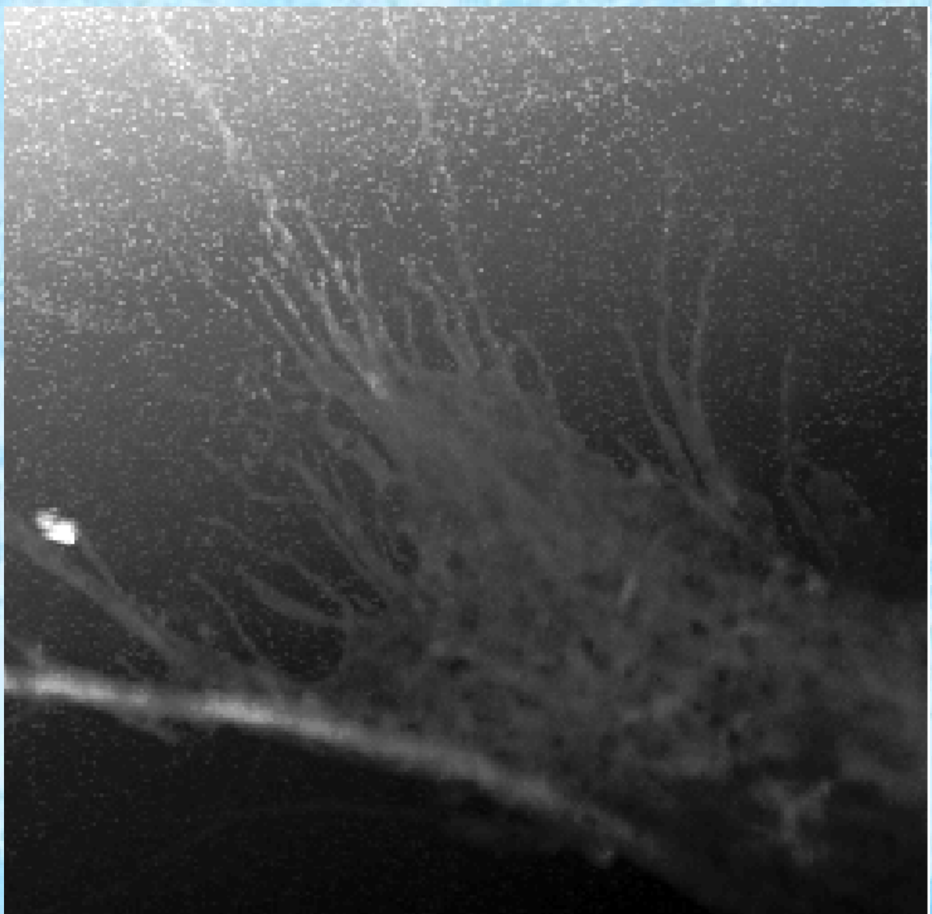
- La foto originale viene alterata con rumore puntiforme casuale
- La foto centrale mostra un tentativo di riduzione di queste alternazioni usando un filtro lineare di smoothing
- La foto a destra mostra l’effetto del filtro di mediana

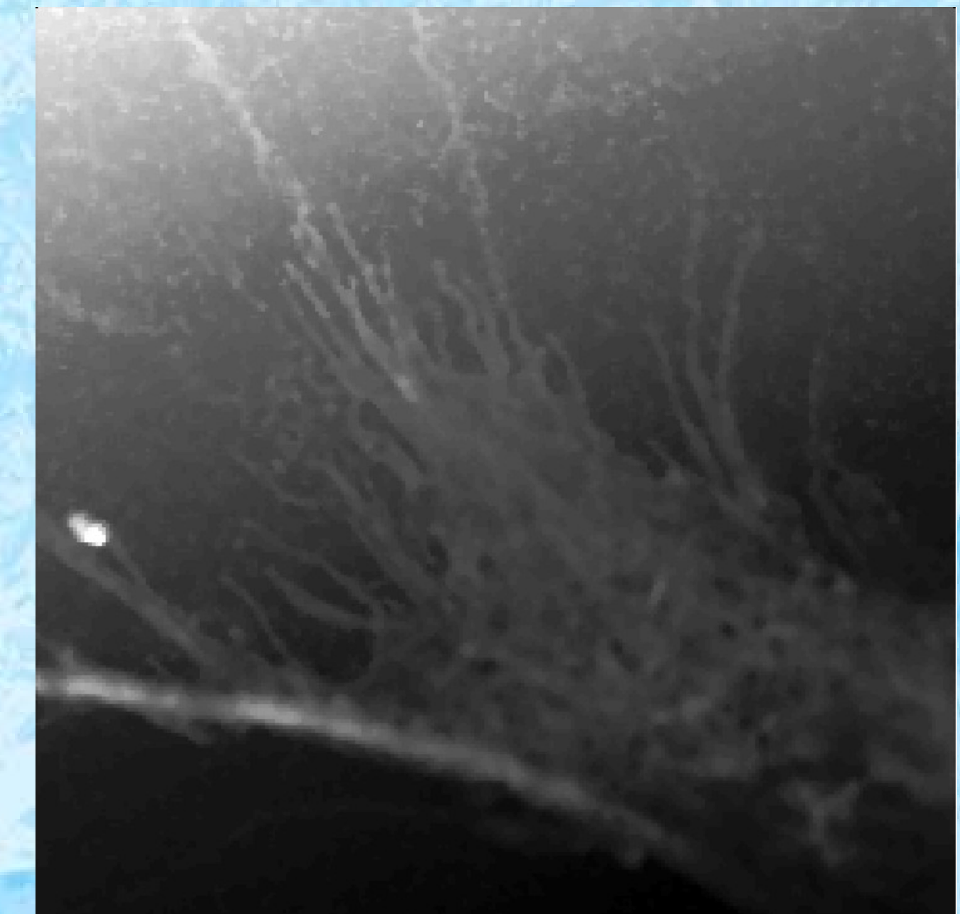
Confronto tra smoothing filter e filtro di Mediana

(a) (b) (c)

Filtro di Mediana

Esempio di applicazione di un filtro di mediana ad un immagine AFM





Filtri

Nel prossimo modulo L-2021-3-2 viene brevemente spiegato un legame tra modelli di deviazione dal comportamento ideale di sistemi di imaging e filtri lineari